

TEORIA JOCURILOR

Cine nu riscă, nu câștigă

FRANCESC ROSSELL I PUJÓS

Traducere de Luiza Stroe

CUPRINS

Capitolul 0

Un cumul de coincidențe	7
<i>Algebră, geometrie și topologie</i>	10
<i>Thomas Woodrow Wilson și Princeton</i>	12
<i>Fundația Institutului de Studii Avansate</i>	16
<i>Problema muștei și a cicliștilor</i>	20
<i>Supremul, infimul și teorema MiniMax</i>	22
<i>Marțienii de la Princeton</i>	24

Capitolul 1

Să începem cu începutul	33
Funcția de utilitate	34
<i>Relația de ordine</i>	36
Alocarea, dominanța și soluția	40
Definiția generală formală	44
<i>Medii, valoarea așteptată și dispersia</i>	52
<i>Axiome și proprietăți ale teoriei mulțimilor</i>	54
<i>Care este valoarea P_k^i?</i>	62
<i>Când strategia ta depinde de cea a altora</i>	80
Jocuri cu sumă zero între doi jucători	83
<i>Demonstrația teoremei MiniMax</i>	84
<i>Sherlock Holmes, Moriarty și jocurile de strategie</i>	106
<i>Piatră, hârtie, foarfece, șopârlă, Spock</i>	112

Capitolul 2

Și brusc a apărut Nash

Un turneu de matematică

Echilibrul lui Nash

Dilema prizonierului

Eficiența lui Pareto

115

118

121

122

130

Capitolul 3

În concluzie. Dezechilibrul lui Nash

135

Anexe

137

1. Alocarea și mulțimea de soluții

138

2. Partidele jocului „doi din trei”

139

Bibliografie recomandată

143

Un cumul de coincidențe

*Nu se pot conecta punctele privind înainte;
se pot conecta doar privind înapoi.*
(Steve Jobs, 1955-2011)

Așa cum – în lumea noastră occidentală – oamenii se nasc într-un spital sau într-o clinică, teoriile matematice ies la iveală odată cu publicarea unei cărți sau a unui articol într-un jurnal științific. Rareori iau naștere acasă, fără atenția profesioniștilor care certifică faptul că totul a mers bine și, dacă este necesar, intervin pentru a asigura finalizarea cu succes a procesului. Iar teoria jocurilor nu face excepție de la regulă: a apărut oficial în 1944, odată cu publicarea cărții *Teoria jocurilor și a comportamentului economic*, ai cărei autori au fost economistul **Oskar Morgenstern** (1902-1977) și matematicianul **John Von Neumann** (1903-1957).

Așa cum se întâmplă uneori, autorii teoriei jocurilor s-au întâlnit printr-o serie de evenimente aparent fără legătură, cum ar fi un accident într-un laborator de la Westinghouse Electric & Manufacturing Company, profiturile enorme ale unor companii mari, sau anexarea Austriei de către Germania nazistă. Și, desigur, Universitatea Princeton. Vom vedea pe parcursul acestei cărți cum s-au conectat.

În anii 1880, Franța a fost percepută ca un fel de paradis pentru familiile evreiești rusești, care au simțit nevoia să-și părăsească țara

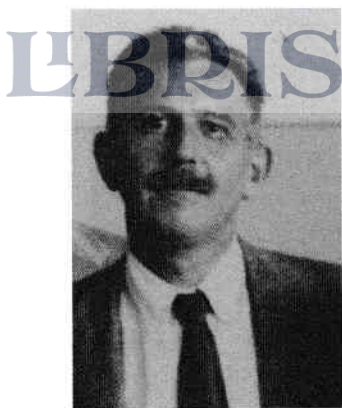


Figura 1.
Solomon Lefschetz.

și să fugă de ura față de cauze religioase; având în vedere această idee, părinții lui **Solomon Lefschetz** (1884-1972) au decis să își stabilească baza familială și de afaceri la Paris. Astfel, Solomon a avut acces la o educație de calitate, plătită cu profiturile uriașe rezultate din afacerile familiei.

După ce a absolvit ca inginer la École Centrale Paris, tânărul Lefschetz a început să caute de lucru. Și-a dat seama că accesul la funcții academice importante i-ar fi foarte dificil, în ciuda cunoștințelor sale matematice solide și a nivelului ridicat de performanță: la câțiva ani după exodul masiv

din Rusia, împreună cu cei peste două milioane de oameni care au trebuit să-și părăsească casa, ura crescândă față de toate lucrurile evreiești se răspândea în toată Europa. Așa că Lefschetz, urmând exemplul părinților săi și la doar douăzeci și unu de ani, a decis să emigreze în Statele Unite.

Agitatul Solomon avea mari așteptări pentru cariera sa de inginer când, la începutul anului 1907, a început să lucreze pentru una dintre cele mai mari companii americane de la acea vreme, Westinghouse Electric & Manufacturing Company. Până atunci, Lefschetz fusese angajat de compania Baldwin Locomotive Works, producătoare de locomotive feroviare, unde cunoștințele sale ca inginer absolvent la Paris erau foarte apreciate.

Cu câteva luni în urmă, Lefschetz începuse să observe o scădere a condițiilor sale de muncă: compania feroviară era departe de cele mai bune zile ale sale, reducând locurile de muncă pe măsură ce scădea cererea de noi locomotive, iar apariția concurenților scufundase sectorul într-un război al costurilor. În plus, fiind evreu, a simțit că va fi unul dintre următorii care vor fi concediați.

Așa că nu s-a gândit de două ori, a căutat o schimbare a locului de muncă și a plecat în domeniul electric.

Ceea ce Lefschetz nu știa când a preluat noul loc de muncă la Westinghouse este că, doar câteva luni mai târziu, va suferi un grav accident de laborator, în urma căruia va pierde ambele mâini și antebrățe. Viitorul strălucit pe care inginerul și-l imaginase pentru el însuși dispăruse și nu avea să îl atingă niciodată. La urma urmei, o mare parte a sarcinilor sale implica manipularea diferitelor obiecte și materiale în laborator și, în noua sa situație, nu își putea păstra slujba.

Procesul de recuperare fizică și mentală a fost lung, în special cel mental, dar a reușit, deoarece a avut două suporturi principale care i-au permis să continue: pe de o parte, a găsit o mare consolă în matematică. El s-a dedicat acesteia trup și suflet, cercetând pe cont propriu în zilele lungi de recuperare. Pe de altă parte, pentru că observaseră talentul matematic pe care Lefschetz l-a demonstrat, compania Westinghouse l-a însărcinat să predea această materie ucenicilor care s-au alăturat companiei. Acolo, Lefschetz s-a simțit util și a învățat în același timp să identifice talentul matematic, făcând distincția între adevăratele genii, care contribuie la avansarea științei, și cei care sunt mulțumiți să explice situația actuală a lucrurilor, fără a merge mai departe.

În 1910, Lefschetz a luat o altă decizie radicală: a părăsit compania și s-a înscris ca doctorand la Universitatea Clark. A vrut să nu mai fie profesor un timp și să se dedice cercetării, să învețe singur. Nimic nu părea mai bun decât un doctorat în matematică: urma să aibă nevoie doar de o bucată de cretă și de ceva cu care să o țină.

S-a adaptat perfect mediului din Universitatea Clark, unde s-a familiarizat rapid cu condițiile excelente ale bibliotecii sale bine dotate. Printre cărți a întâlnit-o pe colega sa Alice Berg Hayes, care câțiva ani mai târziu avea să îi devină soție și principala sursă de motivație pentru a-și continua activitatea de cercetare în matematică.

O parte din algebră definește și clasifică mulțimile de elemente care sunt legate între ele. Astfel, de exemplu, un *grup* este definit ca o mulțime C de elemente a căror relație R între oricare două elemente ale respectivei mulțimi îndeplinește următoarele condiții:

1. Rezultatul relației face parte din mulțime: $\forall x, y \in C, xRy \in C$. Relația este deci o *operație internă*.
2. Rezultatul relației este independent de modul în care sunt grupate elementele: $\forall x, y, z \in C, (xRy)Rz = xR(yRz)$. Relația este deci *asociativă*.
3. Există un singur element $e \in C$ astfel încât toate elementele din mulțimea C rămân neschimbate în relația cu el: $\forall x \in C, xRe = eRx = x$. Relația are, așadar, un *element neutru*.
4. Fiecare element al mulțimii are un element astfel încât, rezultatul relației între ele este elementul neutru: $\forall x \in C \exists y \in C \mid xRy = yRx = e$. Fiecare element din C are un *element simetric*.

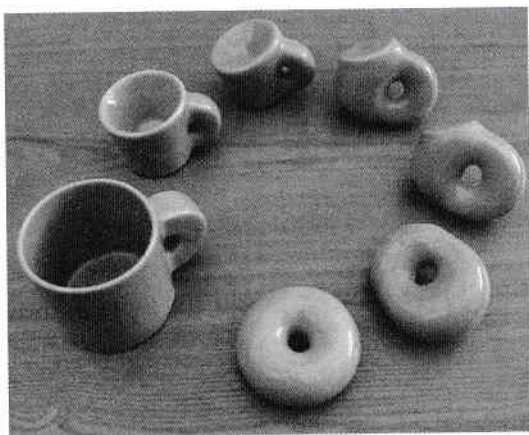
În plus, dacă rezultatul relației nu se modifică atunci când se schimbă ordinea, adică, $\forall x, y \in C, xRy = yRx$, vom spune că relația este *comutativă* și că mulțimea este comutativă (numerele întregi împreună cu relația sumă formează o mulțime comutativă, dar, de exemplu, matricele inversabile, atunci când sunt legate prin produs, nu formează o mulțime comutativă).

O altă structură mai complexă decât cea a unui grup este cea a unui inel, un grup comutativ pe care a fost definită o relație internă suplimentară (o vom nota $\times$) care, pe lângă faptul că este asociativă, adică, $\forall x, y, z \in C, (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$, este distributivă în raport cu relația care definește mulțimea, adică, $\forall x, y, z \in C$ rezultă egalitățile $(xRy) \times z = (x \times z) R(y \times z)$ și $x \times (yRz) = (x \times y) R(x \times z)$.

La fel cum geometria analitică pe care a inițiat-o Descartes a permis studierea curbelor și suprafețelor spațiului $\mathbb{R}^n$ pornind de la proprietățile funcțiilor care le-au definit (geometria diferențială ar face parte din acest sector, în care proprietățile curbelor și suprafețelor se relaționează cu condiția de derivabilitate a funcțiilor care le definesc), geometria algebrică face un pas mai departe raportând unele proprietăți ale curbelor și suprafețelor menționate (curbură, torsiune etc.) cu proprietățile structurilor algebrice pe care le formează, care sunt de obicei de tip inelar. Prin urmare, vom folosi dezvoltările abstracte pentru a specifica, explica și dezvolta proprietăți geometrice.

La rândul său, topologia algebrică face același lucru, dar în ceea ce privește o mulțime redusă de proprietăți ale anumitor curbe și suprafețe: cele care sunt invariante în fața unor deformări continue, adică întindere și comprimare (fără tăiere); de exemplu, numărul de găuri pe care le conține o suprafață este una dintre aceste proprietăți invariante. Aceste proprietăți sunt legate de structurile algebrice de grup. Lefschetz a studiat topologia algebrică ca un mod „simplu” de a intra în lumea geometriei algebrice, adică studierea grupurilor mai întâi și apoi trecerea la inele.

Figura 2. Din punct de vedere topologic, o gogoasă și o ceașcă de cafea sunt echivalente, deoarece se poate trece de la o formă la alta prin deformare, fără tăiere sau lipire.



Al 28-lea președinte al Statelor Unite, Thomas Woodrow Wilson (1856-1924) își începuse activitatea publică după obținerea unui doctorat în științe politice la Universitatea Princeton. A fost numit președinte al acestei instituții în 1902 și a ocupat această funcție până în 1910, când a decis să înceapă o carieră politică care l-a dus la Casa Albă în doar doi ani.

Wilson a fost un om liber, cu o minte deschisă, care și-a bazat mandatul la Princeton pe trei puncte-cheie:

1. Creșterea nivelului intelectual al elevilor sau, după propriile sale cuvinte: „Transformarea băieților slabi care **îndeplinesc sarcini** în bărbați care **gândesc**”.
2. Creșterea nivelului cadrelor didactice, nu numai în ceea ce privește numărul cadrelor didactice (în timpul mandatului său, efectivul a crescut cu 55%), ci mai ales în ceea ce privește calitatea. Wilson însuși a intervenit în numeroase procese de selecție, acordând o atenție deosebită calității educaționale a candidaților.

Lefschetz și-a luat doctoratul în 1911 (la un an după înscrierea ca student) cu o teză despre geometria algebrică, care a provocat admirația Curții – „Cea mai bună teză prezentată vreodată de un candidat din acest departament”, au spus despre lucrare; și, din acel moment, a început să lucreze ca profesor, mai întâi la Clark și mai târziu la alte universități.

Lefschetz a cercetat retras, pentru a nu fi nevoit să piardă timpul explicând progresul oamenilor care nu-i puteau urma raționamentul. Lucrând în acest fel, a publicat articole deosebite despre topologia

3. Secularizarea instituției. În timpul mandatului său, Wilson l-a angajat pe primul profesor evreu și romano-catolic din Princeton și a colaborat activ în alegerea consiliului de administrație din rândul prezbiterienilor mai conservatori.

De asemenea, a promovat profilul profesional al tutorelui, adică al unui profesor care se întâlnea cu grupuri de șase studenți recent înscriși pentru a transmite conceptele de bază pe care ar trebui să le dobândească fiecare student de la Princeton. Acest lucru a oferit elevilor posibilitatea de a primi cursuri personalizate, iar profesorilor să-și cunoască mai bine elevii și, la urma urmei, să-și ghideze studiile în funcție de abilitățile detectate.

Deși Wilson a vrut să meargă mult mai departe și a fost frustrat atunci când consiliul de administrație sau corpul studențesc nu i-au acceptat propunerile (a spus odată că a optat pentru o carieră politică, deoarece mediul politic era mai blând decât administrarea universității), moștenirea liberală a fost menținută cu președinții care au urmat. Princeton a devenit un model de referință pentru universitățile care aspirau să fie printre cele mai bune, precum Harvard, Yale sau Duke.

algebrică, un domeniu pe care el l-a considerat fundamental pentru cercetarea în marele domeniu al geometriei algebrice; spus cu propriile sale cuvinte, „harponul care se înfige în balenă”.

În ciuda faptului că metoda sa de cercetare a dat roade și i-a oferit ocazia de a-și dezvolta propriile idei în felul său, Lefschetz și-a dat seama că a ajuns într-un punct în care era dificil pentru el să continue să avanseze, înțelegând că ar putea progresa mai rapid și mai eficient colaborând cu alți matematicieni care făceau cercetări pe teme

similare. Așa că a decis să-și folosească talentele ca „detector” de geniu și a început să caute cei mai buni colaboratori pentru cercetarea sa, oriunde ar fi aceștia. I-a plăcut enorm.

În 1924, Lefschetz a acceptat funcția de profesor invitat timp de un an la Princeton, care la acea vreme era o mare atracție pentru talentatul cercetător; în plus, din 1920 încetase oficial să fie o universitate presbiteriană, devenind pe deplin laică. Mulți studenți, profesori și cercetători s-au simțit confortabil în acest nou mediu și au putut să își îndeplinească sarcinile academice fără presiuni suplimentare.

La sfârșitul anului, ca profesor invitat, i s-a oferit o funcție permanentă la Princeton în calitate de profesor asociat și tutore (tutorele grupurilor mici de studenți nou-veniți), iar Lefschetz a fost încântat să accepte, deoarece avea ocazia să predea grupurilor formate din doar șase studenți, putând astfel să se concentreze asupra celor care se remarcă prin talentele lor matematice. Noul profesor a intensificat căutarea de genii printre studenții săi, căutând și potențiali colaboratori printre profesori, atât în interiorul, cât și în afara zidurilor din Princeton.

Lefschetz a vrut să facă cercetări cu cei mai buni și a detestat oamenii care, potrivit lui, pierdeau timp pe detalii, urmărind dovezi elegante ale teoremelor deja dovedite. Scopul său era să promoveze matematica și nu era pe cale să lase detaliile să-l împiedice să meargă mai repede. Important era să cunoască talentul și să stea departe de cei care puneau piedici afirmațiilor sale. Astfel, Lefschetz nu pierdea timpul scriind dovezi grațioase, fără erori, și ura studenții care erau ocupați să-l corecteze. În fiecare dimineață, un elev puneă o cretă pe mâna ortopedică a lui Lefschetz și apoi o scotea noaptea, când profesorul terminase o zi plină de explicații ingenioase, deși plină de inexactități și erori. Nu este surprinzător că în Princeton se zvonea că Lefschetz nu scrisese niciodată o demonstrație adevărată și nici o teoremă falsă. Chiar și așa, studenții care au participat la cursurile

sale l-au venerat, în general, și mulți dintre ei l-au menționat ca sursă de inspirație pentru a se dedica matematicii.

În 1930, a fost înființat, la Princeton, Institutul pentru Studii Avansate, o instituție autonomă a universității, al cărei scop era să ofere mijloace oamenilor de știință pentru ca aceștia să se poată dedica activității lor de cercetare, fără alte sarcini sau obiective, institut care a fost dotat cu un buget enorm. Lefschetz a continuat ca profesor la Princeton, dar apropierea institutului i-a oferit noi oportunități de colaborare, precum și un alt argument în ceea ce privește convingerea colaboratorilor săi (actuali sau potențiali) să se transfere la universitatea sa.

În 1934, în timpul unei călătorii la Moscova pentru a participa la un congres de topologie combinatorie, Lefschetz l-a întâlnit pe matematicianul ceh **Eduard Čech** (1893-1960), care își prezenta rezultatele la care a ajuns în acest domeniu. Fără ezitare, Lefschetz s-a apropiat de vorbitor și l-a invitat să viziteze Princeton, pentru că, dacă reușea să-l atragă, era sigur că Čech va contribui cu un articol la creșterea nivelului de calitate al revistei pe care o conducea la acea instituție, *Annals of Mathematics*. Putea deveni astfel un punct de referință la nivel mondial (mai ales după ce Universitatea din Göttingen, punctul de referință în cercetare până atunci, a fost „eliberată” de guvernul nazist din Germania, așa că mulți oameni de știință au emigrat în afara țărilor lor, iar unii dintre ei și-au găsit refugiu în Princeton).

Pe lângă cercetarea topologiei și a noii zone a geometriei diferențiale proiective, lui Čech i-a plăcut predarea: el a spus întotdeauna că scopul său este să fie un profesor de matematică excelent ... de liceu! Poate de aceea citea constant despre ultimele progrese care erau



Figura 3. Timbru cu imaginea lui Eduard Čech.

Soții Bamberger conduceau un magazin mare în Baltimore la mijlocul secolului al XIX-lea, pe care soția îl moștenise. Afacerea familiei mergea din ce în ce mai bine, dar doi dintre cei șase copii ai lor, Louis și Caroline, aveau propriile idei despre cum să îmbunătățească vânzările. S-au mutat la Philadelphia pentru a-și încerca norocul, în 1883, dar marea oportunitate de a-și materializa noile idei a venit în 1906, sub forma unei licitații a unui magazin universal în faliment din Newark, lângă New York. L-au achiziționat împreună cu cei doi parteneri pe care îi aveau deja acolo și au lucrat fără încetare la afacerea lor, Bamberger & Co., care s-a dovedit a fi un succes răsunător, datorită noilor tehnici de publicitate și vânzare. Când frații Bamberger au construit noua clădire pentru stabilirea lor în centrul orașului Newark, a devenit rapid un simbol al orașului, iar vânzările și profiturile au continuat să crească. În 1928, Bamberger & Co. a fost a patra cea mai mare companie de retail din Statele Unite.

În 1929, văzându-și succesul, Louis și Caroline au avut două preocupări: găsirea celui mai bun mod de a nu mai lucra și a decide ce să facă în continuare. Ambii au fost foarte recunoscători pentru norocul pe care l-au avut și au dorit să redea societății o parte din profiturile lor; la urma urmei, Louis era celibatar, iar Caroline, deși fusese căsătorită de două ori, nu avusese copii, așa că au decis că moștenitorii lor trebuie să fie oameni cu mai puțină avere decât ei. Întrucât amândoi erau devotați orașului lor gazdă

publicate, pentru a le prezenta elevilor săi aplicații actuale ale teoriei pe care urma să o învețe. De îndată ce Čech se cufunda într-un articol nou, nu se oprea până nu înțelegea pe deplin ce se explica acolo, împreună cu posibilele relații ale celor expuse în alte articole sau domenii de cercetare.

și, fiind evrei, erau conștienți de ura față de religia lor în Europa, au vrut să facă „ceva” care să le combine pe ambele. Ei s-au gândit că ar fi o idee bună să construiască o școală medicală care să fie la rândul său un loc de înscriere preferențială pentru evrei și un refugiu pentru profesioniștii medicali exilați din Europa.

Frații Bamberger l-au contactat pe Abraham Flexner, principalul expert în educație medicală din acea vreme din Statele Unite și Canada, pentru sfaturi. Dar Flexner, văzând potențialul economic al fraților Bamberger, i-a convins să găsească ceva mai mare: lângă Newark, în Princeton, exista una dintre cele mai prestigioase universități din lume și ar fi foarte convenabil să poată aduna acolo cei mai buni cercetători din lume, de orice specialitate, astfel încât, pur și simplu, să se dedice cercetării. Oricine era interesat să efectueze cercetări post-doctorale (mai ales dacă a suferit un fel de discriminare pe motiv de religie) putea solicita un post de cercetare. Frații Bamberger au fost entuziasmați de idee și au accelerat procesul: și-au vândut magazinele universale în 1929 (chiar înainte de prăbușirea burselor, dovadă suplimentară a norocului sau a unei mari înțelegeri de afaceri a celor doi frați); ei au distribuit un milion de dolari angajaților Bamberger & Co., ca semn de apreciere, și au investit restul pentru crearea Institutului pentru Studii Avansate, care și-a deschis oficial porțile în 1930.

Începuse atracția masivă a talentelor, și mulți profesori din Princeton, precum însuși Solomon Lefschetz, au văzut în institut un centru pentru a-i aduna pe cei mai buni și a obține un progres al cunoștințelor științifice.

Într-adevăr, domeniul preferat de Čech a fost inițial geometria, dar când în 1923 a obținut o poziție de profesor de analiză și algebră la Universitatea Masaryk din Brno, și-a propus să domine în profunzime aceste materii. El a fost surprins în special de progresul în topologie pe care îl realizaseră matematicienii polonezi și a decis să continue